TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN, Faculteit WSK & INF
Tentamen Algebra 2 voor Wiskunde (2F725), 19 januari 2005, 14:00–17:00 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer Uw antwoorden, tenzij anders vermeld. Er zijn 2 pagina's met in totaal 23 onderdelen. Voor elk onderdeel kunt u maximaal één punt halen. Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten met 5/11 te vermenigvuldigen en het resultaat af te ronden. Bij elk onderdeel mogen de resultaten van voorgaande onderdelen gebruikt worden.

---

1. Elk van de volgende multiple choice vragen heeft precies één goed antwoord. Geef alleen aan welk antwoord goed is.

(i) Hoeveel irreducibele veeltermen in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ zijn er van graad 3?

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2

(ii) De ring $\mathbb{Z}[X]/(X^2)$ is

- (a) een domein
- (b) een lichaam
- (c) geen van beide

(iii) Het element 3 is inverteerbaar in

- (a) $\mathbb{Q}$
- (b) $\mathbb{Z}$
- (c) $\mathbb{Z}/(6)$

(iv) De kleine stelling van Fermat zegt dat $x^{q-1} = x$ geldt voor alle x in

- (a) elke ring van orde q
- (b) elk lichaam van orde q
- (c) elk lichaam van karakteristiek q

(v) Welke ondergroep van een gegeven groep G is altijd normaal in G?

- (a) de centralisator van een element
- (b) elke cyklische ondergroep
- (c) het centrum van G

(vi) $C_{i,j}$ is de monoïde met voortbrenger x en relatie $x^{i+j} = x^i$. In de monoïde $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}, *, 1)$ is de deelmonoïde voortgebracht door 3 isomorf met

- (a) $C_{0,4}$
- (b) $C_{0,16}$
- (c) $C_{2,4}$
- (d) $C_{2,16}$

(vii) Het aantal elementen in de ring $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(X^3 + X + 1)$ bedraagt

- (a) 9
- (b) 27
- (c) 81

(viii) Welke van de volgende afbeeldingen van $(\mathbb{Z}/3)[X]/(X^2 + 1)$ naar zichzelf is een automorfisme?

- (a) $f(X) \mapsto f(X + 1)$
- (b) $f(X) \mapsto -f(X)$
- (c) $f(X) \mapsto f(X)^3$

(ix) Welke van de volgende idealen in $\mathbb{Q}[X, Y]$ is maximaal?

- (a) $(\{X, Y\})\mathbb{Q}[X, Y]$
- (b) $(\{X^2, Y + 1\})\mathbb{Q}[X, Y]$
- (c) $(X^2 + X + 1)\mathbb{Q}[X, Y]$

2. Laat F de monoïde zijn van alle functies $\Omega \to \Omega$, waar $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Hoeveel elementen heeft F?

(b) Hoeveel elementen heeft de groep van inverteerbare elementen van F?

(c) Laat zien dat de schrapwet niet geldt in F.

(d) Bepaal het aantal elementen van de deelmonoïde voortgebracht door $[1,2,2,1]$ en $[2,1,1,2]$.

3. Laat f de veelterm $X^5 + X^4 + 2$ in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ zijn, en schrijf $R = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(f)$. Geef met x de restklasse van X in R aan. Verder is gegeven $x^{11} = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2$ en $x^{121} = 1$.

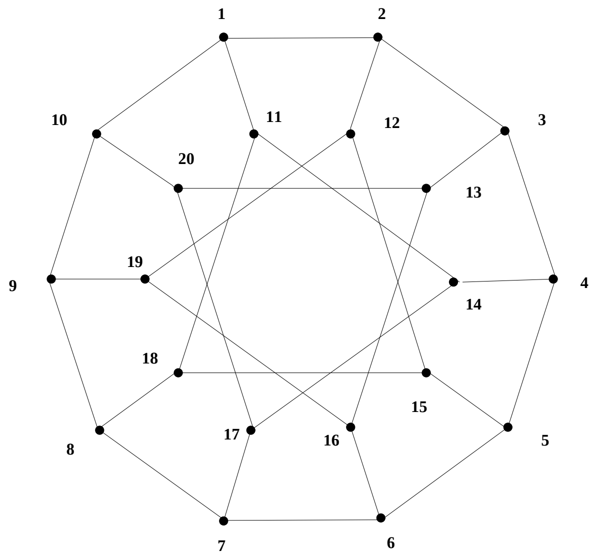
(a) Bewijs dat x inverteerbaar is.

(b) Ga na dat $-x$ multiplicatieve orde 242 heeft.

(c) Leidt hieruit af dat R een lichaam is.

(d) Bewijs dat f irreducibel is in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

(e) Vanzelfsprekend is x een nulpunt van f in R. Wat zijn de vier andere nulpunten van f, uitgedrukt in x?



4. Gegeven is de graaf G uit de figuur met vertexverzameling $X = \{1, \ldots, 20\}$. Laat A de automorfismengroep van G zijn. We geven nog dat de volgende permutatie tot A behoort:

$$c = (3,12)(4,15)(8,17)(9,20)(13,19)(14,18).$$

(a) Ga na dat er precies één automorfisme b in A die de binnenpunten $\{11, \ldots, 20\}$ met de buitenpunten $\{1, \ldots, 10\}$ verwisselt, en 1 met 11 verwisselt, en geef de disjuncte kringsplitsing van b.

(b) Bewijs dat A transitief is op X.

(c) Elke vertex i heeft precies één vertex $z(i)$ op maximale afstand (5). Geef z als een permutatie op X en bewijs dat het een automorfisme is.

(d) Bewijs dat de stabilisator in A van de punten 1, 2, 10, 11 samenvalt met de ondergroep van A voortgebracht door c.

(e) Bepaal de orde van A.