TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN, Faculteit WSK & INF
Tentamen Algebra 2 voor Wiskunde (2F725), 16 januari 2006, 14:00–17:00 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer Uw antwoorden, tenzij anders vermeld. Er zijn 2 pagina's met in totaal 20 onderdelen. Voor elk onderdeel kunt u maximaal één punt halen. Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten met 1/2 te vermenigvuldigen en het resultaat af te ronden. Bij elk onderdeel mogen de resultaten van voorgaande onderdelen gebruikt worden.

---

1. Beschouw de ring $R = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/59\mathbb{Z})$.

(a) Hoeveel elementen heeft R?

(b) Hoeveel elementen heeft de groep R^* van inverteerbare elementen van R?

(c) Bestaat er een natuurlijk getal m met $R \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

(d) Hoeveel nuldelers heeft R?

2. Laat f de veelterm $X^2 + 1$ in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ zijn, en schrijf $R = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(f)$. Geef met x de restklasse van X in R aan.

(a) Hoeveel elementen heeft R?

(b) Bewijs dat de elementen x en $x + 1$ inverteerbaar zijn in R.

(c) Uit het vorige onderdeel blijkt dat vermenigvuldiging met x, zowel als vermenigvuldiging met $x + 1$, permutaties van R zijn. Schrijf ze uit als een product van disjuncte kringen.

(d) Wat is de orde van x en van $x + 1$ als element van de groep van inverteerbare elements van R?

(e) Bewijs dat R een lichaam is.

(f) Wat zijn de monische irreducibele veeltermen van graad 2 in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$?

(g) Van welke van deze veeltermen is $x + 1$ een nulpunt?

3. Laat G de graaf uit de figuur zijn met vertexverzameling $V = \{1, \ldots, 20\}$. Laat verder A de automorfismengroep van G zijn. Duidelijk is dat

$$a = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)(11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20)$$

en

$$b = (2, 10)(3, 9)(4, 8)(5, 7)(12, 20)(13, 19)(14, 18)(15, 17)$$

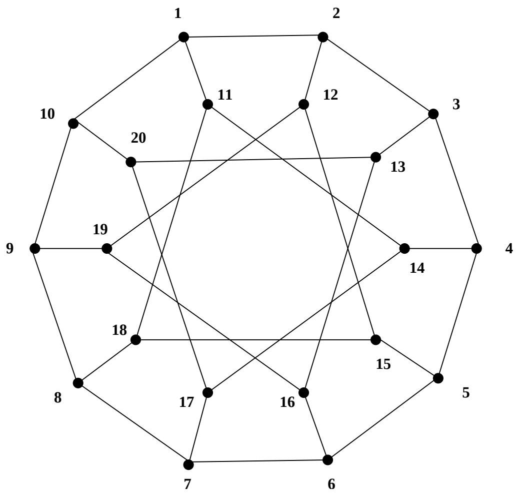
tot A behoren. We geven ook nog dat

$$c = (4, 13)(5, 16)(9, 18)(10, 11)(14, 20)(15, 19)$$

en

$$d = (2, 10, 11)(3, 20, 14)(4, 13, 17)(5, 16, 7)(8, 15, 19)(9, 18, 12)$$

tot A behoren.



(a) Bewijs dat A transitief werkt op V.

(b) Laat zien dat de stabilisator A_1 van 1 in A transitief werkt op de verzameling buren van 1.

(c) Bepaal de orde van A.

(d) Bij elke vertex v in V is er precies één vertex, notatie $z(v)$, op afstand 5 van v in de graaf G. Bewijs dat de afbeelding $v \mapsto z(v)$ tot het centrum van A behoort. We zullen dit automorfisme met z aangeven. (Hint: gebruik de voorgaande twee onderdelen om in te zien dat elke kant kan in elke andere kant kan worden overgevoerd door een automorfisme—dit levert dat de definiërende eigenschap voor z slechts voor één kant hoeft te worden nagegaan.)

(e) We definiëren een nieuwe graaf $\overline{G}$ met als vertexverzameling $\overline{V}$ de tien paren

$$\{\{v, z(v)\} \mid v \in V\};$$

twee vertices $\{v, z(v)\}$ en $\{w, z(w)\}$ zijn verbonden dan en slechts dan als v en w verbonden zijn in G of v en $z(w)$ verbonden zijn in G. Teken de graaf $\overline{G}$ zo dat duidelijk is dat het de Petersengraaf is. We brengen in herinnering dat $\overline{A}$, de automorfismengroep van $\overline{G}$, een groep van orde 120 is.

(f) Bewijs dat als $g \in A$, het voorschrift $\{v, z(v)\} \mapsto \{g(v), g(z(v))\}$ een automorfisme van $\overline{G}$ definieert. Er resulteert een afbeelding $\phi : A \to \overline{A}$.

(g) Bewijs dat ϕ een homomorfisme van groepen is.

(h) Toon aan dat de kern van ϕ orde 2 heeft.

(i) Toon aan dat het beeld onder ϕ van A samenvalt met $\overline{A}$, d.w.z., dat ϕ surjectief is.