TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN, Faculteit WSK & INF
Tentamen Algebra 2 voor Wiskunde (2F725), 16 november 2005, 9:00–12:00 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer Uw antwoorden, tenzij anders vermeld. Er zijn 2 pagina's met in totaal 23 onderdelen. Voor elk onderdeel kunt u maximaal één punt halen. Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten met 5/11 te vermenigvuldigen en het resultaat af te ronden. Bij elk onderdeel mogen de resultaten van voorgaande onderdelen gebruikt worden.

---

1. Elk van de volgende multiple choice vragen heeft precies één goed antwoord. Geef alleen aan welk antwoord goed is.

(i) $C_{i,j}$ is de monoïde met voortbrenger x en relatie $x^{i+j} = x^i$. In de monoïde $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, *, 1)$ is de deelmonoïde voortgebracht door 3 isomorf met

- (a) $C_{0,3}$
- (b) $C_{1,2}$
- (c) $C_{2,1}$
- (d) $C_{3,0}$

(ii) Het element 3 is inverteerbaar in

- (a) $\mathbb{Z}$
- (b) $\mathbb{Z}/(6)$
- (c) $\mathbb{Z}/(14)$

(iii) De stelling die beweert dat de orde van elke ondergroep van een eindige groep G een deler is van de orde van G heet de stelling van

- (a) Fermat
- (b) Lagrange
- (c) Galois

(iv) Welke ondergroep van een gegeven groep G is niet altijd normaal in G?

- (a) de centralisator van een element
- (b) een ondergroep van index 2
- (c) het centrum van G

(v) De ring $\mathbb{Z}[X,Y]/(Y - X - X^2)$ is

- (a) een domein
- (b) een lichaam
- (c) geen van beide

(vi) Het aantal elementen in de ring $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(X^3 + X + 1)$ bedraagt

- (a) 25
- (b) 125
- (c) 625

(vii) De afbeelding van $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ naar zichzelf gegeven door $f \mapsto f^3$ is

- (a) een automorfisme
- (b) een homomorfisme maar geen automorfisme
- (c) geen homomorfisme

(viii) Welke van onderstaande ringen is een lichaam?

- (a) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X,Y]/(\{X^2+Y^2-6, Y-X^2\})$
- (b) $\mathbb{Q}[X,Y]/(\{X^2+Y-6, Y-X^2\})$
- (c) $\mathbb{R}[X,Y]/(\{X^2+Y-6, Y-X^2\})$

2. Laat F de monoïde zijn van alle functies $\Omega \to \Omega$, waar $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$. Beschouw de deelverzameling G van F bestaande uit alle elementen f van F met $f(1), f(2) \in \{1,2\}$.

(a) Hoeveel elementen heeft F?

(b) Hoeveel elementen heeft de groep F^* van inverteerbare elementen van F?

(c) Bewijs dat G een deelmonoïde van F is.

(d) Uit hoeveel elementen bestaat G?

3. Laat f de veelterm $X^4 - X - 1$ in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ zijn, en schrijf $R = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/(f)$. Geef met x de restklasse van X in R aan. Verder is gegeven dat $x^{48} = x^3 + 3x^2 + x - 1$, dat $x^{156} = -1$, en dat $x^{208} = x^3 + x^2 - x$.

(a) Wat is het aantal monische irreducibele veeltermen van de graad 4 in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$?

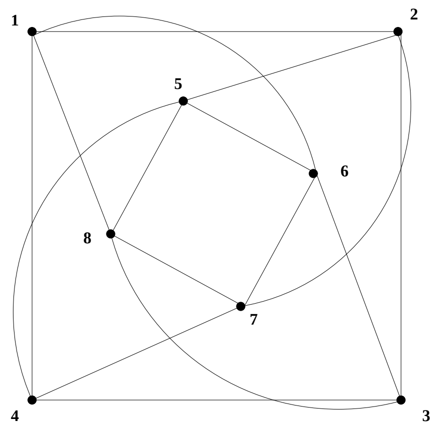
(b) Bewijs dat de orde van de ondergroep van de groep R^* (van inverteerbare elementen van R) voortgebracht door x gelijk aan 312 is.

(c) Voor het element $a = x^3 + x + 3$ van R geldt $a^8 = -1$. Leidt hieruit af dat a een groep van inverteerbare elementen van R van orde 16 voortbrengt.

(d) Bepaal de orde van de vermenigvuldigingsgroep voortgebracht door x en a en leidt hieruit af dat R een lichaam is.

(e) Bewijs dat f irreducibel is in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

(f) Vanzelfsprekend is x een nulpunt van f in R. Wat zijn de vier andere nulpunten van f, uitgedrukt in x?



4. Laat $G = (V, E)$ een eindige graaf zijn. De complementaire graaf $\overline{G}$ van G heeft dezelfde vertexverzameling V als G, maar de complementaire kantverzameling $\overline{E}$. Dus

$$\overline{E} = \{\{x, y\} \mid x, y \in V,\ x \neq y,\ \{x, y\} \notin E\}.$$

(a) Bewijs $\mathrm{Aut}(\overline{G}) = \mathrm{Aut}(G)$.

(b) Laat vanaf nu G de graaf uit de figuur zijn met vertexverzameling $V = \{1, \ldots, 8\}$. Teken de graaf $\overline{G}$.

(c) Er is een partitie van de vertexverzameling V in twee parten ter grootte 4 zo dat geen punt van het ene part verbonden is met het andere in $\overline{G}$. Geef deze partitie.

(d) Bewijs dat er een automorfisme in $\mathrm{Aut}(G)$ is dat de twee parten van onderdeel (c) verwisselt.

(e) Bepaal de orde van $\mathrm{Aut}(G)$.