TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica
Tentamen Algebra 2, 2WF10,
Vrijdag 21 january 2011, 14:00 – 17:00

Name :

Student number :

Exercise	1	2	3	4	5	total
points						

Notes: This exam consists of 5 exercises. You can reach 50 points. The final mark is computed by dividing the total number of points by 5 and rounding the result down to the nearest integer.
Make sure to justify your answers in detail. It is not sufficient to state the correct result without the explanation.
All exercises are stated in Dutch and in English.

Attentie: Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. U kunt maximal 50 punten behalen. Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 5 te delen en het resultaat tot een geheel cijfer af te ronden.
De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer uw antwoorden, tenzij anders vermeld.
Alle opgaven worden in het nederlands en in het engels gepresenteerd.

1. This exercise is about permutations.
   Deze opgave gaat over permutaties.

   (a) Write σ as a product of disjoint cycles.
   Bereken de decompositie in disjuncte cykels van σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 7 & 8 & 10 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

2 P

   (b) Compute the cycletype of σ.
   Bereken het cykeltype van σ. 1 P

   (c) Compute the order of σ.
   Bereken de orde van σ. 1 P

   (d) Give a representation of σ as a product of transpositions. Compute $\mathrm{sgn}(\sigma)$.
   Schrijf σ als product van transposities. Bereken $\mathrm{sgn}(\sigma)$. 2 P

2. Let $C_{k,n} = \{e, c, c^2, \ldots, c^{n+k-1}\}$, where $c^{n+k} = c^k$ and $|C_{k,n}| = n + k$ be a cyclic monoid. For $C_{2,3}, C_{0,6}$, and $C_{3,0}$ determine all invertible elements.

   Zij $C_{k,n} = \{e, c, c^2, \ldots, c^{n+k-1}\}$, waar $c^{n+k} = c^k$ en $|C_{k,n}| = n + k$, een cyclische monoid. Bepaal van $C_{2,3}, C_{0,6}$, en $C_{3,0}$ alle inverteerbare elementen.

4 P

3. Define the set M and an operation $\circ$ as follows
   Laat de verzameling M en de operatie $\circ$ als volgt zijn

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Q}, ad - bc = 1 \right\},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Show that $(M, \circ)$ is a semigroup.
   Laat zien dat $(M, \circ)$ een halfgroep is. 4 P

   (b) Does $(M, \circ)$ have a neutral element? If so state it; if not, why not?
   Is er een neutraal element in $(M, \circ)$? Zo ja, welk? Zo nee, waarom niet? 2 P

   (c) Determine the set of all elements of $(M, \circ)$ that are invertible.
   Bepaal de verzameling van elementen van $(M, \circ)$ welke inverteerbaar zijn.

4 P

(d) Is $(M, \circ)$ commutative? Why?
Is $(M, \circ)$ commutatief? Waarom? 2 P

4. The alternating group A_4 is the a subgroup of S_4 consisting of all permutations σ with $\text{sgn}(\sigma) = +1$.
De alternerende groep A_4 is de ondergroep van S_4 van alle permutaties σ met $\text{sgn}(\sigma) = +1$.

(a) State all elements of A_4.
Geef alle elementen van A_4. 2 P

(b) Determine a minimal set of generators of A_4.
Bepaal een minimale verzameling van voortbrengers van A_4. 4 P

(c) State the definition of left cosets of a subgroup H of a group G.
Geef de definitie van linkernevenklassen van een ondergroep H van een groep G. 2 P

(d) State all left cosets of A_4.
Bepaal alle linkernevenklassen van A_4. 2 P

5. Consider the ring $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
Beschouw de ring $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

(a) How many elements does R have?
Hoeveel elementen heeft R? 1 P

(b) Compute the order of R^*.
Bereken de orde van R^*. 2 P

(c) Compute the (multiplicative) order of $(1, 3, 4) \in R^*$.
Bereken de (multiplicatieve) orde van $(1, 3, 4) \in R^*$. 2 P

(d) Does there exist an integer m such that $R \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$? If so, compute it, explain how to compute the ring homomorphism and the inverse of the ring homomorphism, and compute the image of $(1, 3, 2)$. If not, why not?
Bestaat er een natuurlijk getal m met $R \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$? Zo ja, bereken m, verklaar hoe het ring homomorfisme en de inverse van het ring homomorfisme berekent kunnen worden en bereken het beeld van $(1, 3, 2)$. Zo nee, waarom niet? 7 P

(e) Find two elements $a, b \in R$ so that $a \cdot b = (0, 0, 0)$ but $a, b \neq (0, 0, 0)$.
Bepaal twee elementen $a, b \in R$ zodat $a \cdot b = (0, 0, 0)$ maar $a, b \neq (0, 0, 0)$. 2 P

(f) Compute the number of elements $a \in R$ with $a \neq (0, 0, 0)$ for which there exists a $b \neq (0, 0, 0)$ such that $a \cdot b = (0, 0, 0)$. How many such elements exist inR^*?
Bereken het aantal elementen $a \in R$ met $a \neq (0, 0, 0)$ waarvoor er een $b \neq (0, 0, 0)$ bestaat met $a \cdot b = (0, 0, 0)$. Hoeveel van zulke elementen bestaan er in R^*? 4 P