TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica
Tentamen Algebra en Discrete Wiskunde, 2WF50, Woensdag 02 Juli 2014, 14:00 – 17:00

Name :

Student number :

Exercise	1	2	3	4	5	6	total
points							

Notes: This exam consists of 6 exercises. You can reach 100 points. The mark for the exam is computed by dividing the total number of points by 10.
Make sure to justify your answers in detail. It is not sufficient to state the correct result without the explanation.
All exercises are stated in Dutch and in English.

Attentie: Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. U kunt maximaal 100 punten behalen. Het cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 10 te delen.
De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer uw antwoorden, tenzij anders vermeld.
Alle opgaven worden in het nederlands en in het engels gepresenteerd.

1. Let $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ denote the field of complex numbers with regular addition and multiplication. Let the sets M_1 and M_2 be defined as follows:
Laat $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ het lichaam van de complexe getallen met de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging zijn. Laat de verzamelingen M_1 en M_2 als volgt gedefinieerd zijn:

$$M_1 = \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} | a, b, c \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}, \qquad M_2 = \{a + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} | a, b, c \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

   (a) State the definition of a subring.
   Geef de definitie van een deelring. $\boxed{8\text{ P}}$

   (b) Study whether $(M_1, \cdot)$ is a semigroup.
   Ga na of $(M_1, \cdot)$ een halfgroep is. $\boxed{4\text{ P}}$

   (c) Study whether $(M_2, \cdot)$ is a semigroup.
   Ga na of $(M_2, \cdot)$ een halfgroep is. $\boxed{4\text{ P}}$

   (d) Is $(M_1, +, \cdot)$ a subring of $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? Why?
   Is $(M_1, +, \cdot)$ een deelring van $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? Waarom? $\boxed{8\text{ P}}$

   (e) Is $(M_2, +, \cdot)$ a subring of $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? Why?
   Is $(M_2, +, \cdot)$ een deelring van $(\mathbb{C}, +, \cdot)$? Waarom? $\boxed{2\text{ P}}$

2. Let $M = 35\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ with $+$ the usual integer addition and let $N = 105\mathbb{Z}$.
Laat $M = 35\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ zijn met $+$ de gebruikelijke optelling en laat $N = 105\mathbb{Z}$ zijn.

   (a) Show that $(N, +)$ is a subgroup of $(M, +)$.
   Toon aan dat $(N, +)$ een ondergroep van $(M, +)$ is. $\boxed{2\text{ P}}$

   (b) State the definitions of a group homomorphism, its kernel and its image.
   Geef de definities van een groep homomorfisme, kern en beeld. $\boxed{6\text{ P}}$

   (c) State a group homomorphism ϕ from M to N, compute the kernel of ϕ.
   Geef een groephomomorfisme ϕ van M naar N en bereken de kern van ϕ. $\boxed{3\text{ P}}$

   (d) State all left cosets of N in M.
   Bepaal alle linkernevenklassen van N in M. $\boxed{4\text{ P}}$

3. Consider the ring $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.
Beschouw de ring $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

   (a) How many elements does R have?
   Hoeveel elementen heeft R? $\boxed{1\text{ P}}$

   (b) Compute the order of $R^\times$.
   Bereken de orde van $R^\times$. $\boxed{3\text{ P}}$

(c) Compute the (multiplicative) order of $(2, 3, 5) \in R^\times$.
Bereken de (multiplicatieve) orde van $(2, 3, 5) \in R^\times$. 4 P

(d) Does there exist an integer m such that $R \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$? If so, compute it, explain how to compute the ring homomorphism and the inverse of the ring homomorphism, and compute the image of $(2, 3, 5)$. If not, why not?
Bestaat er een natuurlijk getal m met $R \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$? Zo ja, bereken m, verklaar hoe het ringhomomorfisme en de inverse van het ringhomomorfisme berekend kunnen worden en bereken het beeld van $(2, 3, 5)$. Zo nee, waarom niet? 14 P

(e) Find two elements $a, b \in R$ so that $a \cdot b = (0, 0, 0)$ but $a, b \neq (0, 0, 0)$.
Bepaal twee elementen $a, b \in R$ zodat $a \cdot b = (0, 0, 0)$ maar $a, b \neq (0, 0, 0)$. 3 P

(f) Compute the number of elements $a \in R$ with $a \neq (0, 0, 0)$ for which there exists a $b \neq (0, 0, 0)$ such that $a \cdot b = (0, 0, 0)$. How many such elements exist in $R^\times$?
Bereken het aantal elementen $a \in R$ met $a \neq (0, 0, 0)$ waarvoor er een $b \neq (0, 0, 0)$ bestaat met $a \cdot b = (0, 0, 0)$. Hoeveel van zulke elementen bestaan er in $R^\times$? 8 P

4. State the definitions of a domain, of an ideal, and of a principal ideal.
Geef de definities van een domein, een ideaal, en van een hoofdideaal.
6 P

5. Prove or give a counterexample:
Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:

(a) The quotient of a commutative ring modulo a maximal ideal is a domain.
De quotient van een commutatieve ring modulo een maximaal ideaal is een domein. 4 P

(b) The quotient of a commutative ring modulo a principal ideal is a field.
De quotient van een commutatieve ring modulo een hoofdideal is een lichaam. 4 P

6. Let F be a field.
Laat F een lichaam zijn.

(a) State the definition of the characteristic of F.
Geef de definitie van de karakteristiek van F. 2 P

(b) Let $\phi : F \to F$ be an isomorphism. Show that $L = \{x \in F | \phi(x) = x\}$ is a subfield of F.
Laat $\phi : F \to F$ een isomorfisme zijn. Toon aan dat $L = \{x \in F | \phi(x) = x\}$ een deellichaam van F is. 4 P

(c) State conditions for $a \in F$ so that the map $\psi : F \to F$, given by $\psi(x) = a \cdot x \cdot a$, a field homomorphism?
Geef de condities op $a \in F$ aan zodat de afbeelding $\psi : F \to F$ met $\psi(x) = a \cdot x \cdot a$ een lichaamhomomorfisme is. 6 P